•

CONCOURS SCIENCES

**MATHEMATIQUES (Epreuve A)**

*Durée : 4 heures*

Jeudi 4 mai 1978 de 8 heures à 12 heures

•

**Notations.** $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels ; $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$.

E est l'ensemble des fonctions définies de la manière suivante : $f \in E$ si $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et si $\int_0^\infty f^2(x)\,dx$ converge.

Dans les parties I et II on étudiera un cas particulier.

## — I —

1. — *a*) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{(t^2+x^2)^\alpha}\,dt \quad \text{a un sens si } \alpha > \frac{1}{2} ;$$

on pose alors

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^2+x^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_0^\infty \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{(t^2+x^2)^2}\,dt$$

*b*) Montrer que pour $x > 0$, $\quad h(x) = \dfrac{\pi}{4x^2(x+1)}$ ;

en déduire $h(x)$ pour $x < 0$.

2. — *a*) Montrer que pour $u > 0$ on a $0 < \operatorname{Arc\,tg} u < u$ ; en déduire $0 < g(x) < \dfrac{\pi}{2x}$ pour $x > 0$.

Quelle est la limite de $g$ quand $x \to +\infty$ ?

*b*) On suppose $0 < x < 1$ ; démontrer l'inégalité

$$\frac{\pi}{8} \operatorname{Log} \frac{x^2+1}{x^2} < \int_0^1 \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^2+x^2}\,dt ;$$

en déduire que $g(x) \to +\infty$ si $x \to 0^+$.

3. — On pose, pour $x > 0$ et $T > 0$,

.../...

$$h(x) = \int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{(t^2+x^2)^2}\, dt$$

$$h_T(x) = \int_0^{T} \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{(t^2+x^2)^2}\, dt$$

$$g_T(x) = \int_0^{T} \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^2+x^2}\, dt$$

*a*) Démontrer l'inégalité

$$\left| \int_1^x u\,[h(u) - h_T(u)]\, du \right| \leqslant \frac{|x^2-1|}{2} \int_T^{\infty} \frac{\operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^3}\, dt .$$

*b*) Soit

$$H(T,x) = \iint_A \frac{2ut \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{(t^2+u^2)^2}\, dt\, du ,$$

et

$$A = \left\{ (u,t) \,\middle|\, 1 \leqslant u \leqslant x ,\ 0 \leqslant t \leqslant T \right\} \quad si \quad x > 1$$

$$A = \left\{ (u,t) \,\middle|\, x \leqslant u \leqslant 1 ,\ 0 \leqslant t \leqslant T \right\} \quad si \quad x < 1 .$$

Montrer que $H(T,x)$ existe et que l'on a :

$$H(T,x) = \int_1^x 2u h_T(u)\, du = g_T(1) - g_T(x) , \text{ si } x > 1$$

*c*) Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g'(x) = -2x\, h(x)$ (faire tendre T vers $+\infty$).

4. — Déterminer $g'(x)$ puis $g(x)$ pour $x > 0$ ; en déduire $g(x)$ pour $x < 0$ .

*b*) Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^2+1}\, dt \ ?$$

## — II —

$g$ est la fonction définie au I .

1. — Etudier les variations de la fonction $k$ définie sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$ par :

$$k(x) = \frac{\pi}{2(1-x)} - g(x) \qquad \text{pour} \quad x > 0 .$$

$$k(x) = \frac{\pi(x+1)}{2(1-x)^2} - g(x) \qquad \text{pour} \quad x < 0 .$$

2. — Etudier les variations de la fonction $\psi$ définie sur $\mathbb{R}^* - \{-1\}$ par

$$\psi(x) = \frac{x}{(x+1)^2} g(x) \qquad \text{pour } x \neq 0 \qquad \text{et } \psi(x) = 0 \qquad \text{pour } x = 0 .$$

.../...

3. — Montrer que la fonction $\psi$ est continue en 0 et tracer sa courbe représentative

## — III —

On rappelle la propriété suivante : si $f$ est continue et positive sur $[a, +\infty)$, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_a^{x} f(t)\,dt$ est bornée sur $[a, +\infty]$.

1. — *a*) Montrer que si $u$ et $v$ sont deux fonctions continues sur $[0, +\infty)$ on a l'inégalité

$$\left[\int_0^x u(t)\,v(t)\,dt\right]^2 \leqslant \int_0^x u^2(t)\,dt \int_0^x v^2(t)\,dt \qquad (1)$$

quel que soit $x > 0$ (le trinôme en $\lambda$, $P(\lambda) = \int_0^x (u + \lambda v)^2(t)\,dt$ est toujours positif).

*b*) Déduire du *a*) que si $u \in E$ et $v \in E$ alors $\int_0^{\infty} u(x)\,v(x)\,dx$ est absolument convergente et que l'on a

$$\left[\int_0^{\infty} u(x)\,v(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_0^{\infty} u^2(x)\,dx \int_0^{\infty} v^2(x)\,dx \qquad (2)$$

*c*) Montrer que E est un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$, le produit scalaire étant défini par

$$u * v = \int_0^{\infty} u(x)\,v(x)\,dx$$

on aura alors pour $f \in E$, $\|f\| = \sqrt{\int_0^{\infty} f^2(t)\,dt}$.

2. — Soit $f \in E$.

*a*) Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{t\,f(t)\,dt}{(t^2+x^2)^{\alpha}}$ converge si $\alpha > \frac{3}{4}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

On pose alors : $\varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{t\,f(t)\,dt}{t^2+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

*b*) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{(x^2+t^2)^2}$$

puis démontrer l'inégalité :

$$\left[\varphi(x)\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{4x}\|f\|^2 \qquad \text{pour } x > 0. \qquad (3)$$

*c*) $x$ étant fixé $(x > 0)$, soit $h$ tel que $x + h > \frac{x}{2}$. Démontrer l'inégalité

$$\left|\varphi(x+h) - \varphi(x)\right| \leqslant \frac{4\left|h\,(2x+h)\right|}{x^2} \int_0^{\infty} \frac{t\left|f(t)\right|dt}{t^2+x^2}$$

En déduire que $\varphi$ est continue pour $x \in \mathbb{R}^*$

3. — Soit $\Theta$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\Theta(x) = \frac{x}{(x+1)^2}\varphi(x)$ pour $x \neq 0$ et par $\Theta(x) = 0$ pour $x = 0$.

*a*) Montrer que $\Theta \in E$, et que l'on a $\|\Theta\|^2 \leqslant \frac{\pi}{24}\|f\|^2$ [utiliser (3)]

*b*) Montrer que l'application de E vers E qui, à $f$ associe $\Theta$, est une application linéaire et continue.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail